Angelo Genocchi e la matematica

La figura di Angelo Genocchi (Piacenza 05/03/1817- Torino 07/03/1889), uomo e matematico, è ben rappresentativa del periodo storico, il Risorgimento, in cui è vissuto: l’uomo (e patriota), coerente con le sue idee a favore dell’indipendenza e dell’unità nazionale, lascia Piacenza nel momento in cui gli austriaci vi ritornano e si trasferisce a Torino; il matematico partecipa direttamente e attivamente alla nascita della così detta «tradizione matematica italiana» riconosciuta ed apprezzata anche al di fuori dei confini nazionali.
A Torino entra in buoni rapporti con G. Plana e soprattutto con F. Chiò; quest’ultimo si ispirava alla «nuova analisi» di A. Cauchy e Genocchi ne accetta e condivide le idee innovative basate sul rigore e sulla chiarezza definitoria dei princìpi.
Si può dire che Chiò e Genocchi siano illustri matematici di collegamento tra la tradizione Lagrangiana e la moderna analisi che andava sviluppandosi in Francia e Germania .

La sua formazione matematica autodidatta gli permette di non essere influenzato dalla tradizione Lagrangiana, di potersi dedicare ai suoi studi preferiti soprattutto teoria dei numeri, e di pubblicare innumerevoli memorie su varie riviste.
Assieme a E. Betti e F. Brioschi nel 1858 fonda gli «Annali di matematica pura ed applicata» e mantiene una fitta ed interessante corrispondenza con i maggiori matematici di quel periodo.
Dal 1865 tiene il corso di analisi infinitesimale: i manoscritti delle sue lezioni sono fitti di appunti, note, correzioni che rivelano la cura che dedicava alla preparazione delle sue lezioni e l’attenzione nel tenersi aggiornato sugli sviluppi della disciplina.
Nel 1884 viene pubblicato il testo «Calcolo differenziale e principi di calcolo integrale» a cura del suo assistente G. Peano che diverrà, non senza asperità almeno inziali da parte dello stesso Genocchi, uno dei più importanti testi di analisi tradotto in varie lingue .

Alcuni argomenti di cui Genocchi si è occupato direttamente (residui quadratici) o di cui ha fornito chiarimenti, precisazioni o opinioni personali:

1) Residui quadratici
2) Unità immaginaria
3) Derivabilità e continuità
4) Geometrie non euclidee

1) Residui quadratici (in campi numerici finiti)

Premessa: **<u>Congruenze modulo</u>** p

$a,\ b \in Z$ e $p \in N \geq 2$

$a \equiv b \pmod{p}$ si legge a congruo a b modulo p

significa che a e b hanno lo stesso resto nella divisione con p

Equivalentemente:

$a \equiv b \pmod{p}$ se $a - b = k \cdot p$ cioè se $a - b$ è multiplo di p

Esempi: 1) $102 \equiv 32 \pmod{5}$ infatti $102 = 20 \cdot 5 + 2$

$$32 = 6 \cdot 5 + 2$$

equivalentemente: $102 - 32 = 14 \cdot 5$

2) $-1 \equiv -73 \pmod{12}$ infatti $-1 = 0 \cdot 12 - 1$

$$-73 = -6 \cdot 12 - 1$$

equivalentemente: $-1 - (-73) = 72 = 6 \cdot 12$

<u>**Residui quadratici modulo**</u> p (con p numero primo)

$a \in Z$ è detto residuo quadratico $(\mathrm{mod}\ p)$ se la congruenza algebrica di grado 2 (binomia):

$$x^2 \equiv a \quad (\mathrm{mod}\ p)$$

ammette soluzione.

Esempi: 1) $x^2 \equiv 2 \quad (\mathrm{mod}\ 7)$ ha soluzione $x = 3$ infatti

$$3^2 \equiv 2 \quad (\mathrm{mod}\ 7) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 9 = 1 \cdot 7 + 2 \\ 2 = 0 \cdot 7 + 2 \end{array}$$

2) $x^2 \equiv 5 \quad (\mathrm{mod}\ 11)$ ha soluzione $x = 7$ infatti

$$7^2 \equiv 5 \quad (\mathrm{mod}\ 11) \quad \Leftrightarrow \quad 49 - 5 = 44 = 4 \cdot 11$$

Problema:
stabilire l'esistenza e, successivamente, un metodo di soluzione delle congruenze algebriche di secondo grado. Tale ricerca è analoga a sapere se a è o no residuo quadratico modulo p .

Eulero: (esistenza soluzioni)

a è residuo quadratico modulo p se e solo se

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

Esempio: $x = 8$ è residuo quadratico di $x^2 \equiv 9 \pmod{11}$

perché $9^{\frac{11-1}{2}} \equiv 1 \pmod{11}$ cioè $9^5 \equiv 1 \pmod{11}$

infatti $9^5 - 1 = 59.049 - 1 = 5.368 \cdot 11$

Legendre: sia p primo dispari e sia $a \in Z$.
Si definisce simbolo di Legendre il seguente:

$$\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} 0 \;\; se \quad p/a \\ 1 \;\; se \quad a \;\; è \quad residuo \quad quadratico \;\; \mod p \\ -1\, se \quad a \;\; è \;\; non\, residuo \;\; quadratico \;\; \mod p \end{cases}$$

Esempi: $\left(\frac{4}{13}\right) = 1$ cioè 4 è residuo quadratico $(\mod 13)$. Infatti

$4^{\frac{13-1}{2}} \equiv 1 \; (\mod 13)$ cioè $4^{6} \equiv 1 \; (\mod 13)$ dato che $4096 - 1 = 13 \cdot 315$

$\left(\frac{6}{3}\right) = 0$ infatti $3/6$ cioè 3 è divisore di 6

$\left(\frac{2}{11}\right) = -1$ infatti 2 non è residuo quadratico $(\mod 11)$

Legge di reciprocità quadratica

Siano p e q numeri primi dispari distinti.
Allora

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \quad \text{cioè} \quad \left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$$

Di tale legge, Genocchi fornisce una pregevole dimostrazione seppur non troppo dissimile da una pubblicata da Eisenstein alcuni anni prima.

I campi numerici finiti (nei quali vale la legge di reciprocità) sono di notevole importanza per la teoria dei numeri, per la geometria algebrica, per certi settori della fisica o per creare algoritmi di crittografia e cifratura cioè quell’elenco di istruzioni mediante le quali due interlocutori possono scambiarsi messaggi senza che una terza persona possa intercettarli e leggerli.

2) <u>Unità immaginaria</u> $\sqrt{-1} = i$

Le quantità immaginarie (numeri complessi) ebbero origine nel rinascimento nella formula risolutiva delle equazioni di terzo grado. Fino a Leibnitz erano intese come «miracoli», «cose» non ben comprensibili. E’ con Gauss ed Hamilton che si ha una vera e propria sistemazione della teoria dei numeri complessi.

Sappiamo che una radice quadrata (numeri reali) ha significato solo se il radicando è non negativo .

Il fatto che si possa considerare la scrittura $\sqrt{-1}$ sembrava assurda a molti matematici come pure «l’uguaglianza» $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$

Genocchi, con grande semplicità, in una lettera al conte P. Salvatico scrive che è assurdo considerare una teoria basata sul concetto di quantità negative sotto radice quadrata, ma tutto diventa comprensibile e chiaro se solo si considera $\sqrt{-1}$ solo come un simbolo convenzionale.

Se $i = \sqrt{-1}$ è solo una convenzione, allora non c'è più contraddizione tra le relazioni

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B} \quad \text{vera solo se} \quad A, B \geq 0$$

e $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ che risulta solo una convenzione

Da $i = \sqrt{-1}$ segue $i^2 = -1$, dunque, basta sostituire, nel calcolo, -1 ovunque compare i^2 e non si avrà alcuna contraddizione.

Numeri di Genocchi ($G_1, G_2, \dots$)

Sono numeri interi che costituiscono una successione generata dal seguente sviluppo in serie

$$\frac{2t}{e^t + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} G_n \cdot \frac{t^n}{n!}$$

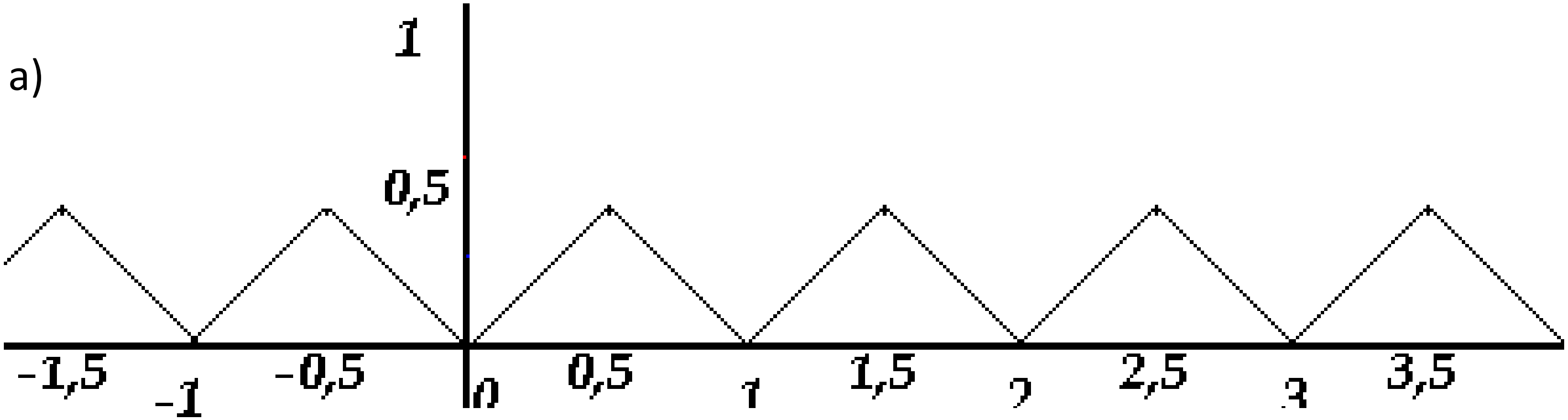
Tutti i numeri di Genocchi , ad eccezione del primo G_1 , con indice dispari sono nulli.

Servono per calcolare la somma di potenze del tipo $\frac{t^k}{k!}$ e, assieme ai numeri di Bernoulli e di Eulero hanno applicazioni nell'analisi e nella teoria dei numeri.

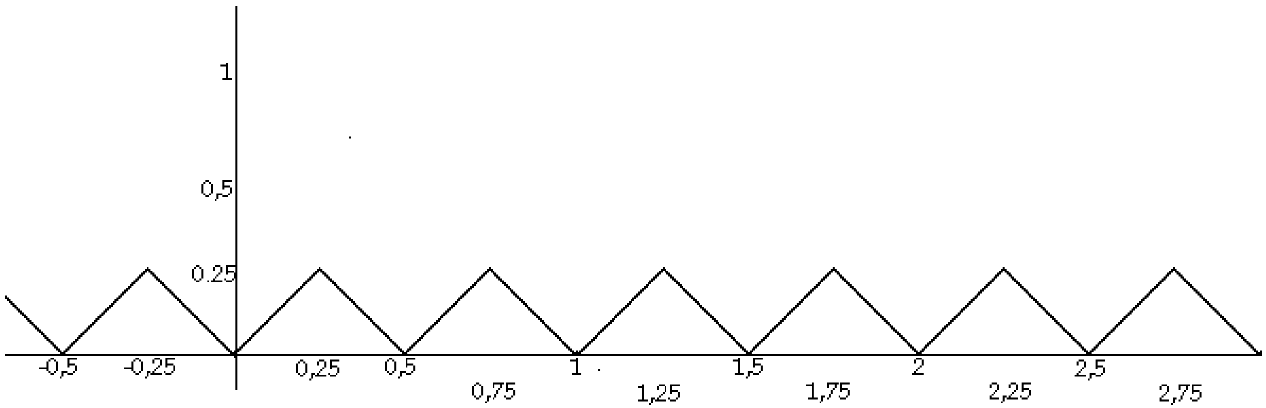
3) <u>Derivabilità e continuità</u>

Fino ai primi del 1800, i matematici erano convinti che ogni funzione continua ammettesse sempre derivata tranne al più in un numero finito di punti.
Il viaggio nel settembre del 1858 a Berlino di Betti, Brioschi e Casorati (che aveva sostituito Genocchi impossibilitato a partecipare) porta a conoscenza del fatto che esistono funzioni continue che non hanno derivata in alcun loro punto : fu K. Weierstrass che propose un esempio di tali funzioni .
Considerando i grafici riportati successivamente, partendo dalle funzioni a) $S_0(x) := | x - \underline{x} |$ e b) $S_1(x) := S_0(2x) / 2$ si ottiene la funzione somma c) $S_0(x) + S_1(x)$ che è continua ma non derivabile in $\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \ldots..$
Se poi si somma ad esse anche la funzione $S_2(x) := S_0(4x) / 4$ si ottiene il grafico d).
Continuando allo stesso modo si ottiene il grafico e) di una funzione continua ma non derivabile il alcun suo punto.

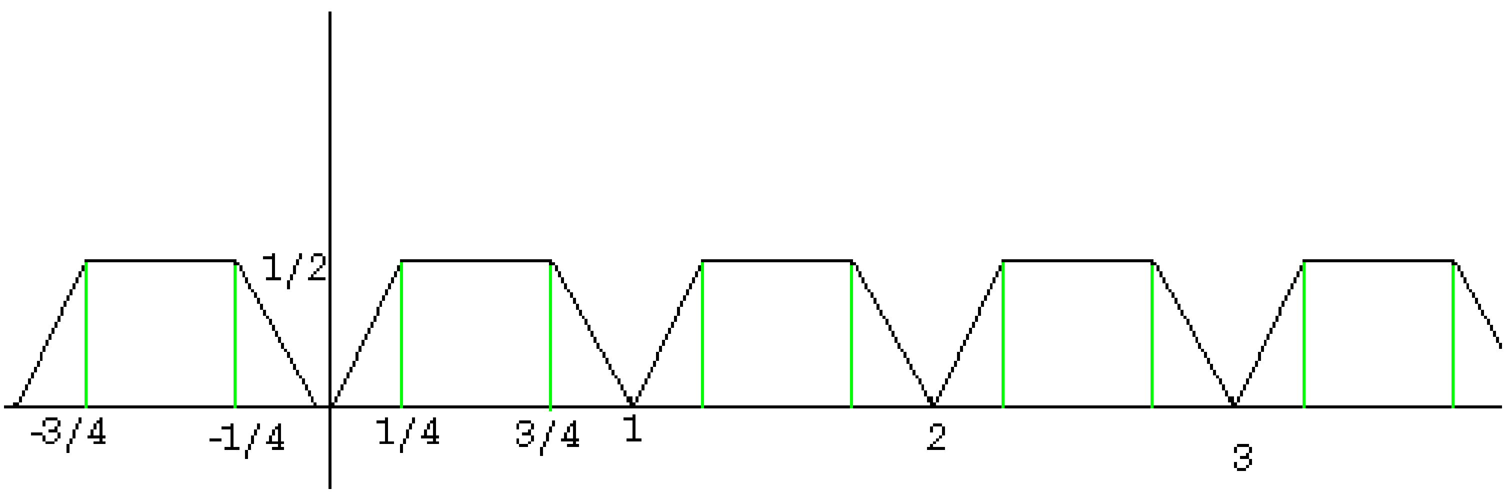
a)


1
0,5
-1,5
-1
-0,5
0,5
1
1,5
2,5
3,5

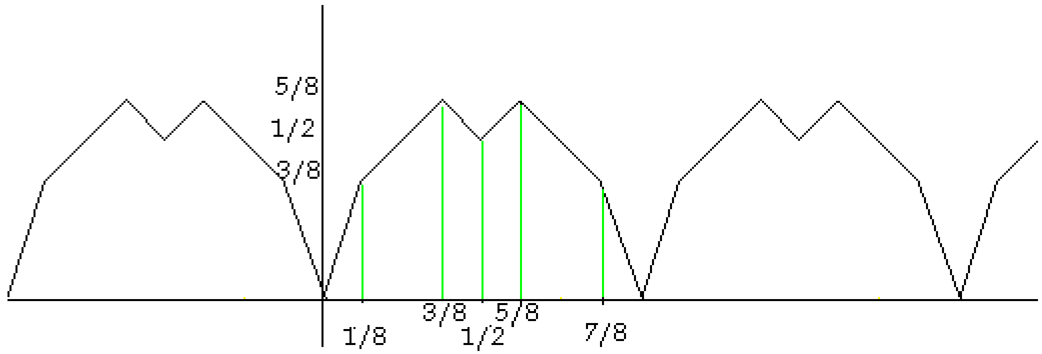
b)


1
0,5
0.25
-0,5
-0,25
0,25
0,5
0,75
1
1,25
1,5
1,75
2
2,25
2,5
2,75

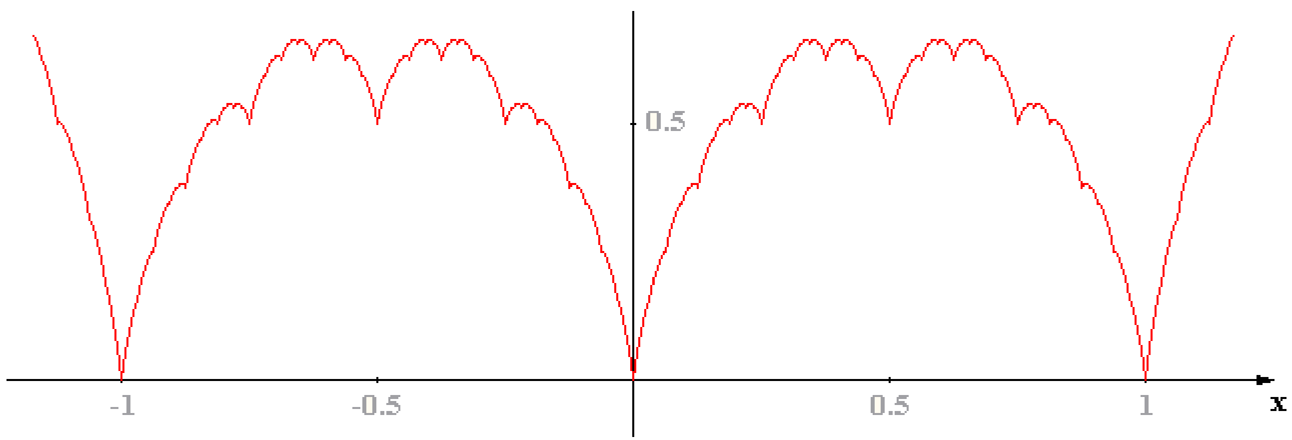
c)


1/2
-3/4
-1/4
1/4
3/4
1
2
3

d)



e)



Generalizzando: la funzione $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{S_0\left(2^k\cdot x\right)}{2^k}$ è continua in tutto R ed è non derivabile in ogni punto di R .

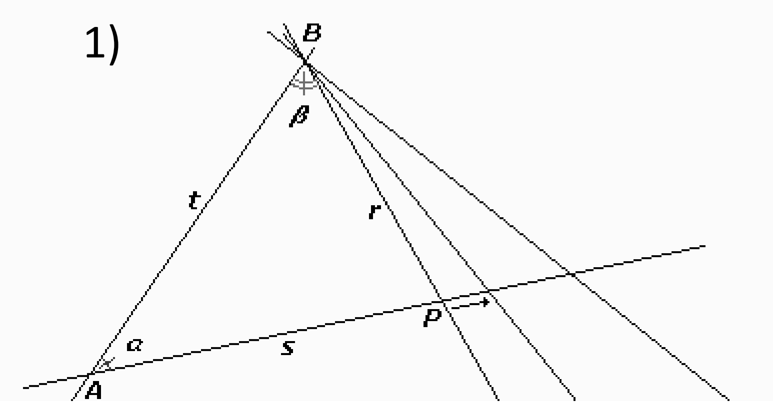
Per lungo tempo Genocchi si ingegnò a trovare la dimostrazione che ogni funzione continua ammette derivata; le novità arrivate da Berlino, però, lo indussero a correggere quanto da lui fino ad allora insegnato in Università: in un suo manoscritto del 1875, conservato presso la Biblioteca Passerini-Landi, a margine c'è una postilla in cui prende atto delle nuove scoperte.

Ciò è significativo della cura con cui preparava le sue lezioni, dell'attenzione che riservava alle novità rilevanti ed anche della capacità di correggere gli errori mano a mano che ne vedeva la necessità.

4) Geometrie non euclidee

Quinto postulato di Euclide: se una retta (t) incontra due rette (r ed s) e con esse forma, dalla stessa parte, angoli interni (α, β) la somma dei quali è minore di due retti $(\alpha + \beta < 180°)$, allora se si prolungano le due rette esse si incontrano dalla parte detta (in un punto P).
Dubbi:

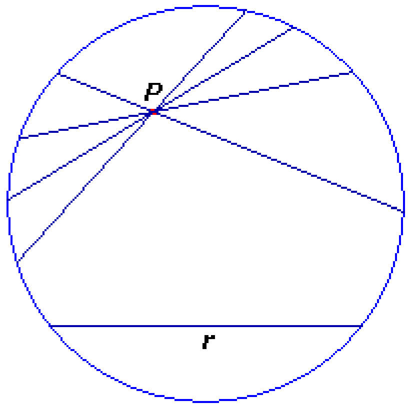
1)



Manteniamo fisse t ed s e facciamo ruotare r in verso antiorario attorno a β : il quinto postulato dice che r incontrerà s in P fino a che $\alpha + \beta < 180°$.
Ma cosa succede se $\alpha + \beta = 180°$ cioè se il punto P si allontana sempre di più dal punto A?
Ad un certo punto P non sarà più «visibile» e, dunque, non sarà possibile verificare che la retta r non possiede più un punto in comune con s.

La particolarità del quinto postulato sta nel fatto che si riferisce a rette immaginarie indefinitamente estese nei due versi. Dato che la massima lunghezza di una linea «reale» è finita, allora tale postulato non potrà mai essere verificato sperimentalmente.

2)

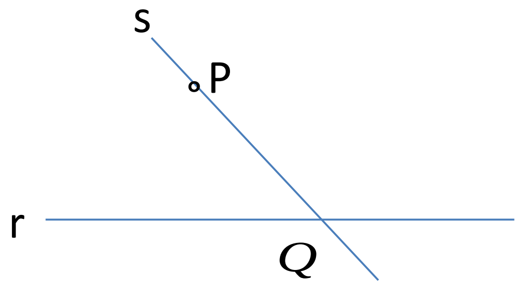


Altra formulazione del quinto postulato (dovuta a Proclo): dati in un piano una retta ed un punto non appartenete ad essa, esiste in tale piano una sola retta passante per tale punto e parallela alla retta data.
Si ricorda che due rette distinte si dicono parallele se, pur prolungate indefinitamente, non si intersecano.

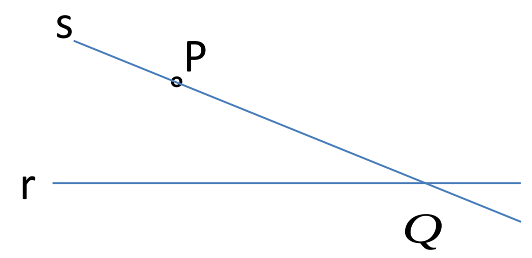
Questa formulazione non è più vera se consideriamo uno spazio di dimensioni finite come per esempio quello contenuto nella zona interna di un cerchio.

In tal caso, la retta r è una corda del cerchio e P è un punto interno.
Dal disegno, però, si vede che esistono infinite «rette» che non incontrano la retta r.
Anche se si aumenta il raggio del cerchio, il numero delle rette che non intersecano r è sempre infinito .

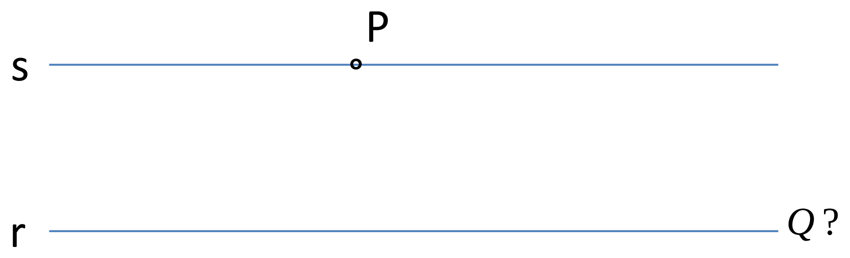
Inoltre, se consideriamo: una retta fissa r, un punto P fuori di essa, una retta s, distinta da r, passante per P e libera di ruotare il verso antiorario attorno al punto P ed il punto Q di intersezione tra esse,



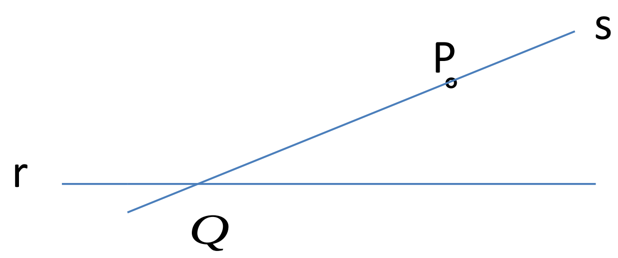
si puo’ notare che, mentre s ruota, il punto Q
si allontana, vincolato alla retta r, verso destra

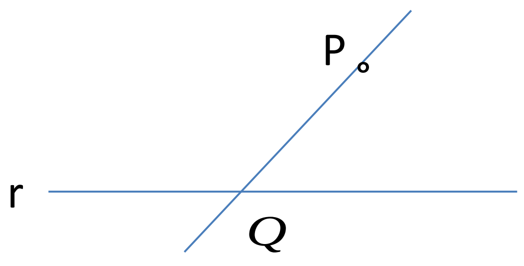


fino a che si giunge ad una (unica) «situazione»
in cui sembra che le 2 rette non si intersechino
cioè sono parallele, ma che fine ha fatto
il punto Q?

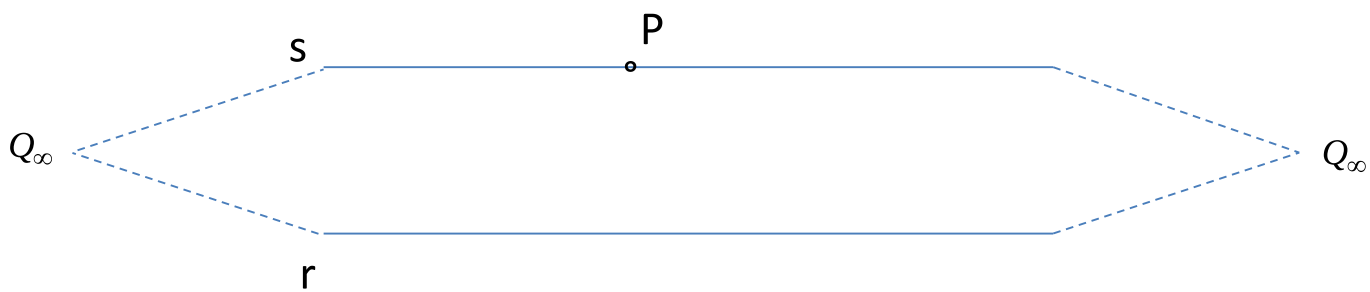


Se la retta continua la sua rotazione in verso antiorario ecco ricomparire il punto Q
(sempre su r) ma a sinistra: le due rette si intersecano di nuovo!!





Dunque il punto Q si muove sulla retta r allontanandosi verso destra «all'infinito» per poi ricomparire «all'infinito» a sinistra, tornando a muoversi sempre con continuità su r: in sostanza il «movimento continuo» di Q su r presenta invece una «discontinuità» !!
Questo alquanto strano comportamento del punto Q può essere compreso ammettendo che esita un «punto all'infinito (Q_∞)» che sia comune alle due rette r ed s:



Così facendo il punto all'infinito Q_∞ consente di eliminare la «discontinuità» perché permette il «collegamento (come un ponte) tra l'infinitamente lontano a destra e l'infinitamente lontano a sinistra».
In tal modo, però, le rette si comportano come curve chiuse e, quindi, non esistono rette parallele perchè 2 rette si incontrano sempre!

Con la semplice osservazione della rotazione di una retta rispetto ad un'altra e con l'introduzione di Q_∞ si è finiti in un «piano» che è «curvo e chiuso»: si è ottenuto un modello non euclideo della retta!!

Dunque la verità del quinto postulato non è per niente immediata (come è invece per gli altri postulati)
Il fatto che non sia verificabile sperimentalmente ha fatto sorgere la naturale domanda: esso è o no indipendente agli altri quattro?
Se non è indipendente (cioè se è una conseguenza degli altri) allora lo si potrebbe eliminare e dimostrarlo partendo dagli altri postulati.
Tentativi, per altro infruttuosi, di tale genere si susseguirono nei secoli.
Il gesuita G. Saccheri (assolutamente convinto della verità del quinto postulato) impostò la questione in maniera differente: accettare i primi quattro postulati e negare il quinto sviluppando logicamente la teoria.
Se si arriverà ad un assurdo si potrà concludere che il quinto postulato è una conseguenza logica degli altri, se, invece, non si arriverà mai ad un assurdo ciò significa che il quinto postulato non è deducibile dagli altri cioè risulta indipendente.
Un errore gli fece credere di aver trovato l'assurdo in una conseguenza che invece non è in contrasto con le premesse.

Anche altri, matematici e no, si occuparono di tale problema.
Gli studi di Legendre, Gauss, Lobatceskij, G. Bolyai permisero di risolvere definitivamente la questione: il quinto postulato è indipendente dagli altri ed anzi può essere sostituito con un altro molto diverso ma altrettanto valido.
La negazione del quinto postulato portò alla costruzione di modelli di geometrie non euclidee che risultano logiche, coerenti senza contraddizioni interne.

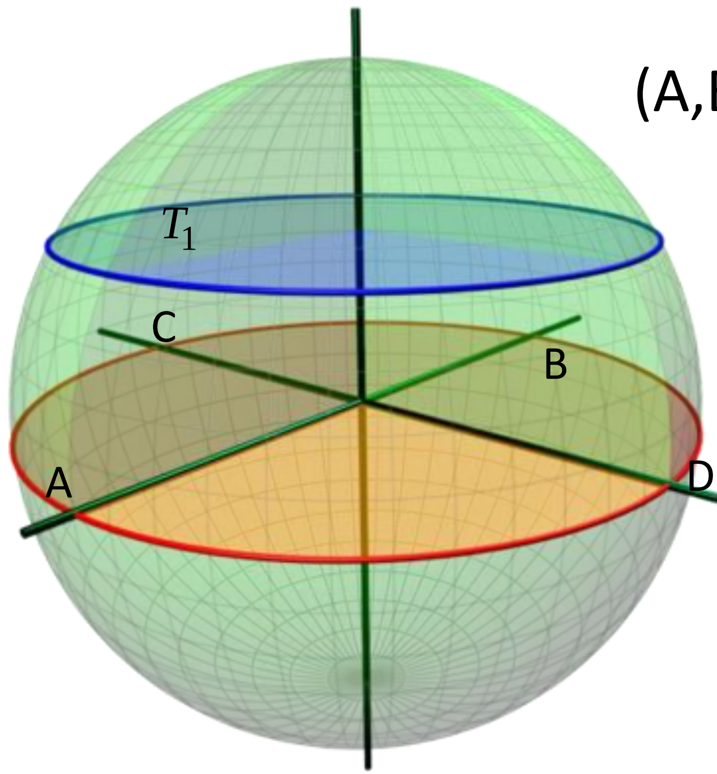
I principali modelli sono:

- la <u>geometria ellittica</u> (dovuta principalmente a Riemann) in cui non esistono rette parallele ad una retta data passanti per un punto esterno ad essa
- la <u>geometria iperbolica</u> (dovuta a Lobatceskij , Bolyai e soprattutto a Klein che completò gli studi) in cui esistono più rette parallele ad una retta data passanti per un punto esterno ad essa.

Geometria ellittica (Riemann)

In una superficie sferica S, si definiscono:

- punto di Riemann: ogni coppia di punti estremi di un diametro di S
- retta di Riemann: ogni circonferenza massima di S
- piano di Riemann: la superficie sferica S



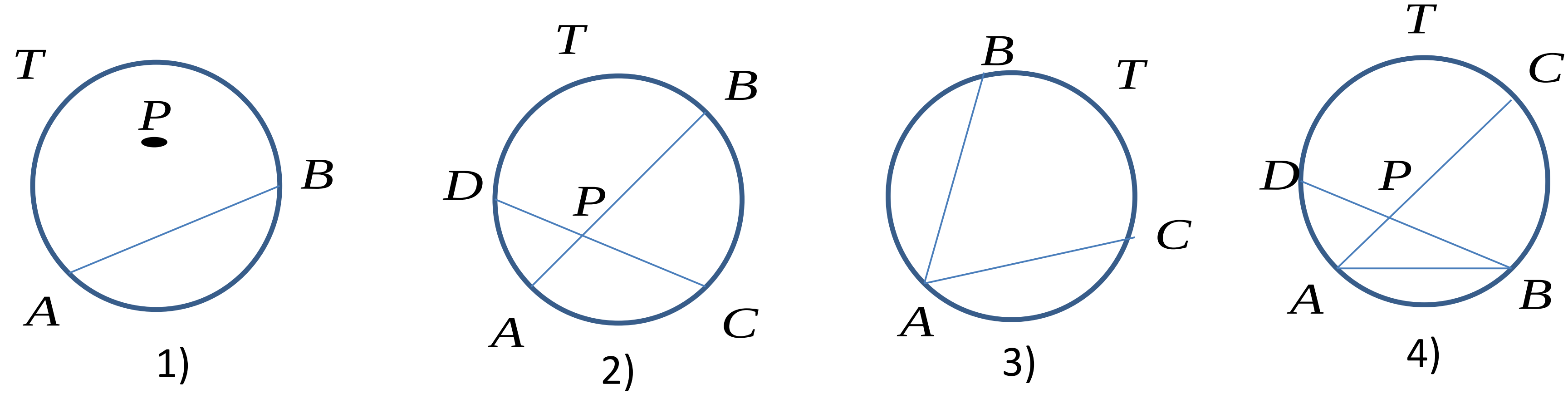
(A,B) e (C,D) punti di Riemann

T_1 è retta di Riemann

Geometria iperbolica (Bolyai, Lobatceskij, Klein)

In una circonferenza T , si definiscono:

- punto di Klein: un qualunque punto P interno a T
- retta di Klein: auna qualunque corda AB di T esclusi gli estremi
- piano di Klein: l’insieme dei punti interni a T

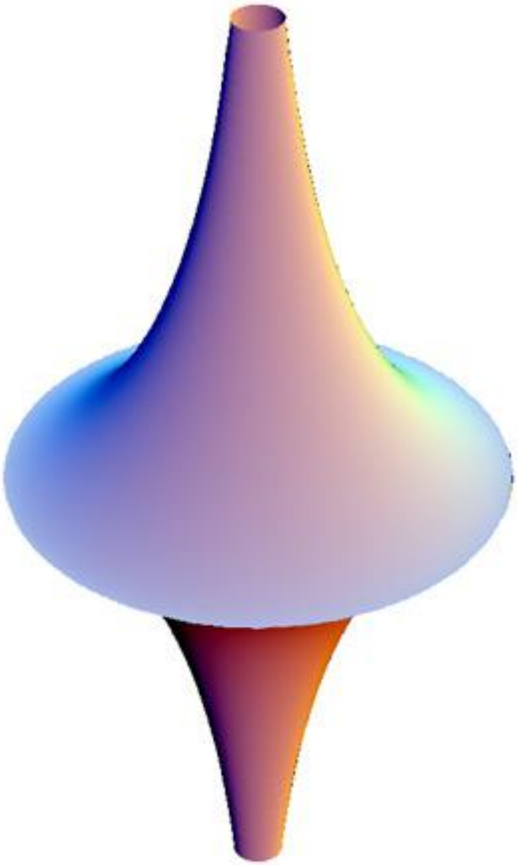


Due rete di Klein sono incidenti se hanno in comune un punto di Klein (le rette AB e CD sono incidenti)

Due rette di Klein si dicono parallele se hanno in comune un punto di T (le rette AB e AC sono parallele)

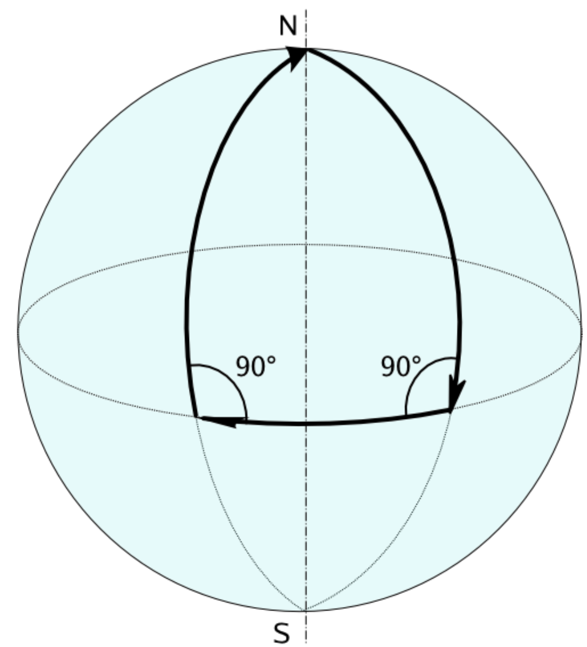
In un piano esistono almeno due rette, passanti per un punto e parallele ad una retta data

(le rette AC e BD sono entrambe parallele alla retta AB).



Iperboloide di rotazione (superficie ottenuta facendo ruotare un’iperbole attorno al suo asse).
Si usa per rappresentare il «piano» della geometria iperbolica

Le geometrie non euclidee non hanno avuto vita facile nella storia della matematica.
Quando Gauss elaborò una geometria iperbolica (rendendosi conto che andava contro le idee di Kant secondo cui la geometria euclidea esiste «a priori» nel cervello dell'uomo e dunque è l'unica adatta a descrivere la natura) preferì non divulgarla.
Invece esse sono adatte a descrivere tanta parte della realtà molto più della geometria euclidea.
Per esempio se si prova a disegnare un triangolo su una superficie sferica (come si può immaginare sia la Terra), esso appare «gonfiato» e la somma dei suoi angoli interni è maggiore di 180°
Su una superficie sferica la geometria euclidea non funziona più e bisogna applicare la geometria di Riemann .



E la posizione di Genocchi davanti a queste novità?
Egli era in corrispondenza epistolare con i maggiori matematici della sua epoca tra i quali alcuni (come Battaglini a Napoli) favorevoli alle nuove geometrie ed altri (come Tardy o Bellacchi a Firenze) contrari sia perché di difficile lettura sia perché ritenute incapaci di fondare una nuova scienza.
Genocchi mostra di essere un moderato e, basandosi sugli studi altrui e sulle proprie riflessioni, non le rifiuta considerandole, anzi, un ulteriore sviluppo della geometria euclidea.
Tuttavia, seguendo sempre quell'esigenza di rigore di cui è permeato il suo «essere un matematico», esorta ad una maggiore verifica delle proposizioni poste alla base di esse dato che la chiarezza e la precisione sono fondamentali per lo sviluppo coerente e logico delle nuove teorie.

Oggi le geometrie non euclidee hanno svariati campi di applicazione:

GEOMETRIA ELLITTICA

- Fisica (Einstein , nella Teoria della Relatività Generale, ipotizzò uno spazio curvo in cui la gravità è un effetto geometrico dello spazio che influenza il moto delle particelle di luce; nello spazio non esiste nulla di simile ad una linea retta e la luce, quindi, segue, sì, il percorso più breve che non è dritto ma è una geodetica.)
- Crittografia (cifrare messaggi segreti)
- Industria robotica (bracci robotici rigidi che sono vincolati a muoversi su una circonferenza o su una sfera)
- Astronomia (robot che ha esplorato Marte alla fine degli anni novanta si doveva muovere su un suolo ondulato ed irregolare cercando sempre di avere il minor consumo ed il minor rischio seguendo, dunque, il percorso più breve (generalizzazione della linea retta) in uno spazio non euclideo.
- Navigazione aerea (per andare da Milano a New York è più veloce passare per il Polo Nord che seguire il parallelo)

GEOMETRIA IPERBOLICA

- Biologia (struttura matematica dei NODI , utile per lo studio di molecole complesse come il DNA)
- Astronomia (studio di oggetti molto distanti come i quasar)
- Arte (artisti come Escher rappresentarono con i mezzi a loro disposizione i nuovi concetti di spazio)

Angelo Genocchi docente

Nel breve periodo in cui insegnò diritto romano all'Università di Piacenza, sembra che Genocchi non fosse particolarmente amato dagli studenti per via del suo carattere chiuso, freddo e severo.
Invece a Torino fu molto apprezzato dagli studenti
Egli propose l'insegnamento dell'analisi, certamente influenzato dalle nuove idee di Cauchy , ma seguendo le sue scelte metodologiche : quella a favore della parte «speculativa ed astratta della matematica» e quella del rigore metodologico.
Tra i suoi tanti allievi e collaboratori ricordiamo:
1) Giuseppe Peano che sostituì Genocchi (assente per motivi di salute) nel biennio 1881-1882 e che mandò alle stampe, non senza polemiche da parte di Genocchi, il trattato «Calcolo differenziale e principi di calcolo integrale». Questo trattato fu tradotto in varie lingue e fu considerato tra i più importanti manuali di analisi.

Le importanti aggiunte fatte da Peano evidenziano la grande distanza tra i le lezioni tenute da Genocchi ed il trattato , tanto da cambiarne completamente l’intera struttura.
Genocchi nelle sue lezioni universitarie si attiene al metodo classico di concepire ed intendere l’analisi mentre Peano, nel rielaborare i contenuti con fine spirito critico, li arricchisce con aggiunte, controesempi e note mettendo così la sua impronta personale di attento e profondo interprete di quell’esigenza di rigore verso cui l’insegnamento di Genocchi l’aveva indirizzato affinandola e personalizzando la trattazione sviluppandola senza alcuna introduzione algebrica.
Nonostante le difficoltà che accompagnarono la pubblicazione, certamente Genocchi ha contribuito con i propri insegnamenti alla diffusione in Italia delle nuove idee.
Peano, che oggi è ricordato come uno dei padri della così detta aritmetizzazione dell’analisi, apprese da Genocchi l’attenzione al particolare, la chiarezza nel linguaggio ed il rigore nelle deduzioni .

2) Vilfredo Pareto che diventerà un noto economista, seguì i corsi di Genocchi durante gli anni accademici 1864-1865 e 1865-1866.
Tutte le conoscenze matematiche e la passione per la stessa sono conseguenza degli insegnamenti del suo maestro Genocchi, come Pareto stesso ebbe a dire, tanto da influenzare significativamente la sua formazione.
Genocchi insegnava l'analisi fondandola sul rigore che riguardava non solamente la coerenza logica dei ragionamenti ma, soprattutto, la verità degli assiomi, verità ottenibile mediante una loro dimostrazione empirica o attraverso un attento controllo della loro evidenza universale o anche mediante una loro dimostrazione logica inoppugnabile.
Secondo Pareto queste sono le caratteristiche che fanno dell'analisi lo strumento utile all'indagine scientifica ed è questa analisi che sembra utilizzare nella sua ricerca economica: evidente assonanza con il credo di Genocchi

3) Galileo Ferraris, collega di studi di Pareto, laureato in Ingegneria civile, diventerà docente al futuro Politecnico di Torino e sarà il fondatore della prima Scuola Elettrotecnica in Italia.

CONCLUSIONE

La vita di Angelo Genocchi, analista teorico di vasta cultura e ingegno, è rivelatrice della grande coerenza tra l'uomo, che si attenne sempre con puntiglio ai propri principi, ed il matematico che, ben inserito nella cultura scientifica del suo tempo, si impegnò con spirito acuto a rivedere e completare con rigore i fondamenti dell'analisi.

E' certamente stato un punto di riferimento nello sviluppo dell'analisi anche se non sempre è riuscito a tenere il passo con le nuove conquiste soprattutto in relazione alla prospettiva logicista (e non solo speculativa) della matematica . Tale nuova prospettiva, in cui Peano fu invece maestro, permise di affrontare lo studio e la risistemazione dei fondamenti della matematica in forma assiomatica quale scienza logico-deduttiva .

La fama di Genocchi, come scrisse il prof. Perin «… non ha suscitato entusiasmi, è rimasta e rimarrà nel domini delle menti superiori che l'hanno giudicato» («Progresso» 01/04/1898)